

252 - Loi binomiale. Loi de Poisson. Applications.

Ces deux lois discrètes sont parmi les plus fréquemment rencontrées en probabilités. La loi binomiale est celle du nombre de succès lors de la répétition d'expériences indépendantes à deux issues. La loi de Poisson apparaît comme loi limite universelle dans de nombreuses situations et joue un rôle fondamental dans les phénomènes de temps d'attente et de répartition aléatoire de points dans l'espace.

I) Loi binomiale [Ross] + [ZQ]

1) Définition et propriétés [Ross]

La loi binomiale [Ross]

Prop : somme de Bernoulli [Ross]

Exemple d'utilisation [Ross]

Espérance, variance, fct génératrice

Graphe de la distribution [Ross]

2) Loi multinomiale [Ross]

Une généralisation : la loi multinomiale [Ross 283]

3) Loi hypergéométrique [Ross]

Loi hypergéométrique : loi de param n, m, N [Ross 189]

Ex : on tire sans remise n boules d'une urne contenant N boules, avec m blanches.

Rq : si m et N sont grands, pas trop de différence entre tirages avec remise ou sans remise. Donc quand m et N sont grands, ça ressemble à une loi binomiale.

Prop : c'ets vrai (calcul)

4) Théorème de Weierstrass [ZQ]

Appl : polynômes de Bernstein et vitesse de cv

II) Loi de Poisson [Ross] + [Carr]

1) Déf

Déf : [Ross 171]

Pptés : variance, espérance, FG

Prop : somme de loi de Poisson

2) Lien entre loi binomiale et loi de Poisson

TCL Poissonien [Carr]

Th de Le Cam [Carr]

Csq : la loi de Poisson approxime une loi binomiale avec n grand et p petit, ce qui la rend utile dans de nombreuses situations. Exemples d'utilisation [Ross 172]

3) Applications

Stirling

Calcul intégrale [Carr]

Points fixes d'une permutation : grâce à la formule du nb de dérangements, on trouve que la proba d'avoir k points fixes est la somme des $d_{\{n-k\}}/k!$ jusqu'à n , qui est proche de $\exp(-1)/k!$ qui est une loi de Poisson.

III) Application : les processus de Poisson [Ross]

[Ross 483]

Développements :

1 - Théorème de Le Cam [Car 78] (**)

2 - Polynômes de Bernstein [ZQ] (**)

Bibliographie :

[Ross]

[Carr]

[ZQ]

Questions du jury 2010 :

on sait que $\text{Bin}(n, l/n)$ tend en loi vers $P(l)$. Si on suppose $n \cdot l_n \rightarrow l$, a-t-on $B(n, l_n) \rightarrow P(l)$? Et si $n \cdot l_n \rightarrow 0$? Qu'est $P(0)$?
Si $X_n \rightarrow \text{le dirac en } 0$ en loi, a-t-on mieux comme convergence ?

Variance d'une loi de Bernoulli ?

Que peut-on dire des points de discontinuité de la fonction de rep ? Combien y'en a ?

Soit f croissante. la limite à droite existe ? et à gauche ?

Exo : X suit une loi $P(l)$. Quelle est la proba que X soit paire ? Pourquoi cette proba est $> 1/2$ (intuitivement).

Exo : X suit $P(l)$, Y suit $P(m)$, indépendantes. Loi de la somme ?

Exo : X_n suivent $\text{ber}(p)$. $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Th de convergence pour S_n/n ?

Exo : majoration de $P(|S_n/n - p| > \epsilon)$?